Zbornik radova 53. Konferencije za ETRAN, Vrnjačka Banja, 15-18. juna 2009.
Proc. 53rd ETRAN Conference, Vrnjačka Banja, June 15-18, 2009

MODELIRANJE SIVE KUTIJE SISTEMA CENTRALNOG GREJANJA

Saša Jovanović, *Zastava automobili a.d., Kragujevac*, piter@ia.kg.ac.yu
Milan Matijević, *Mašinski fakultet u Kragujevcu*, mmatijevic@kg.ac.yu
Slobodan Đorđević, *Energetika d.o.o., Kragujevac*, sdjordjevic@energetikakg.com

Abstract – *U ovom radu je dat pregled tehnike modeliranja "sive kutije" koja se bazira na stohastičkim diferencijalnim jednačinama. Opisan je metod maksimalne verodostojnosti, kao metod za estimaciju modela. Na kraju su pomenute i neke metode validacije za procene parametara modela.*

1. UVOD

Po svojoj prirodi, svi sistemi centralnog grejanja su nelinearni. Jedan sistem centralnog grejanja se može podeliti na standardne komponente, kao što su cevovod, ventili, radijatori, pumpe, termostatski ventili, izmenjivači toplote, stambeni objekti, i td. Stambeni objekat je na neki način takođe komponenta sistema grejanja budući da on čini okruženje u kome se nalazi sistem centralnog grejanja.

2. MODELIRANJE I IDENTIFIKACIJA

Modeliranje sistema je iterativan proces koji se sastoji iz tri koraka:

Identifikacija – tj. određivanje strukture modela, itd
Estimacija – tj. procena parametara modela
Validacija modela – tj. ocena da li je model odgovarajući, a ako "nije" idi na korak 1.

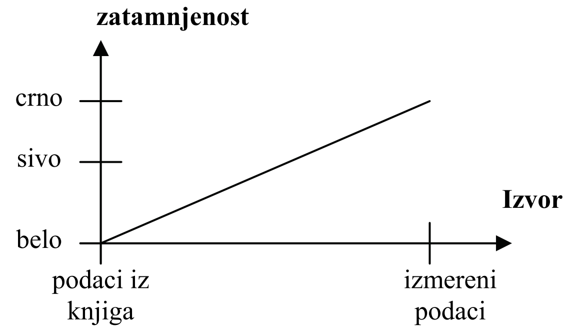
Problem identifikacije, u dovoljno opštem obliku, može se definisati na sledeći način [1]: "Identifikacija je određivanje, na osnovu ulaznih i izlaznih signala procesa, modela iz određene klase modela, koji je ekvivalentan procesu na kome su izvršena određena merenja". Znači, treba definisati: klasu modela, kriterijum ekvivalencije (kriterijum za ocenu valjanosti modela) i klasu ulaznih signala.

U zavisnosti od stepena korišćenja pred znanja o sistemu, pristup modeliranju može se podeliti na dva dela:

modeliranje "bele kutije". Struktura modela je poznata i definisana poznavanjem fizike sistema i parametri su deterministički.

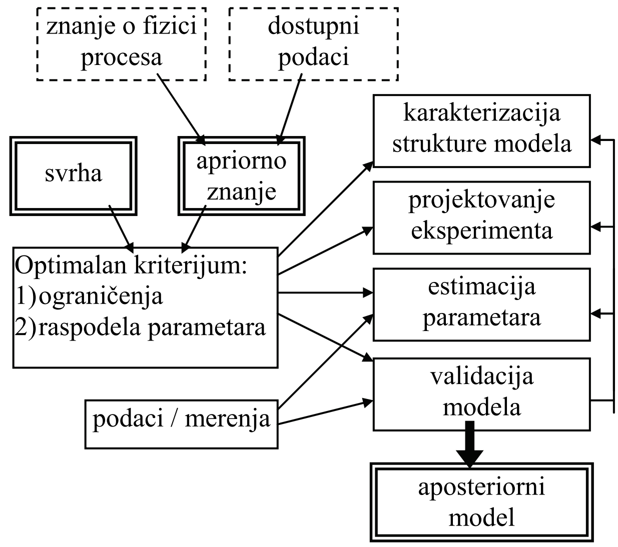
modeliranje "crne kutije". Struktura modela je nepoznata a predznanje je veoma površno. Optimalni parametri i optimalna struktura modela se obično nalaze kao kombinacija onih parametara i strukture modela koji daju najbolji opis ulaza/izlaza, tj. koji su mereni statističkim metodama na ostacima i td. Prednost modeliranja "crne kutije" je u tome što se ne zahteva nikakvo pred znanje o procesu. Mana je nedostatak fizičke interpretacije identifikovane strukture modela i estimiranih parametara.

Metod modeliranja tzv. "sive kutije" razvijen je relativno skoro. Kod ove metode kombinuju se i koriste dobre osobine obe konvencionalne metode. Dinamičko modeliranje i identifikacija sistema centralnog grejanja i njegovih komponenti bazirano je na metodi modeliranja "sive kutije" [2]. Ovaj metod modeliranja ima brojne prednosti u odnosu na konvencionalne metode ("bela" i "crna kutija"). Kod modeliranja "sive kutije", klasa modela se sastoji od stohastičkih diferencijalnih jednačina i prema tome, strukture nelinearnog sistema su direktno modelirane. Osim toga, moguće je koristiti apriorno znanje o sistemu pri formulisanju modela. Primeri apriornog znanja su podaci o fizičkim svojstvima iz knjiga i znanje dobijeno eksperimentima. Kao što je prikazano na slici 1, "zatamnjenost" modela je kompromis između korišćenja apriornog znanja i informacija u merenim podacima predstavljenih za vreme identifikacije modela, tj. aposteriornog znanja. Dva ekstrema modeliranja, belo ili crno, su ostvarena kada je težište potpuno stavljeno na apriornom znanju ili na merenim podacima, respektivno.



Slika 1. *"Zatamnjenost" modela*

Procedura modeliranja metode modeliranja "sive kutije" je šematski data na slici 2. "Svrha" utiče na sve procedure modeliranja. Svrha su predikcija, simulacija, detekcija greške i upravljanje sistemom. Projektovanje eksperimenta se odnosi na određivanje parametara koji su od interesa da se koriste u modelu. Ostali delovi slike sami sebe opisuju.



Slika 2. *Metod modeliranja "sive kutije"*

3. STOHASTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Konvencionalan način za modeliranje fizičkog sistema je da se, na osnovu pred znanja o fizici procesa, on izrazi preko skupa diferencijalnih jednačina, zasnovanih, na primer, na zakonima o održanju mase i momenta. Modeliranje se može formulisati kao postavljanje običnih diferencijalnih j-na:

$$d\underline{X}(t) = F\big(\underline{X}(t), \underline{U}(t), t\big)\, dt, \quad \underline{X}(0) = \underline{X}_0 \tag{1}$$

gde $\underline{X}$ označava vektor stanja sistema (promenljive stanja), a $\underline{U}$ je vektor ulaza (tj. upravljanje). Funkcija F opisuje promene fizičkih stanja sistema. Početno stanje sistema je $\underline{X}_0$.

Osnovna ideja u pristupu modeliranju "sive kutije" je da se iskoriste i pred znanje o sistemu i osobine izmerenih podataka, u formulisanju modela za sistem. Dodavanjem stohastičkog člana u (1), dobija se skup stohastičkih diferencijalnih jednačina. Klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina koja je pogodna za modeliranje sistema centralnog grejanja, ima opšti oblik:

$$\begin{aligned} d\underline{X}(t) &= F\big(\underline{X}(t), \underline{U}(t), \underline{\theta}, t\big)\, dt + G\big(\underline{U}(t), \underline{\theta}, t\big)\, d\underline{W}(t) \\ \underline{X}(0) &= \underline{X}_0 \end{aligned} \tag{2}$$

gde $\underline{X} \in R^{nx}$ je vektor promenljivih stanja, $\underline{U} \in R^{nu}$ je vektor ulaza, $\underline{\theta} \in R^{np}$ je vektor parametara i $\underline{W}$ je *nx*-dimenzioni šum procesa, tj. *Wiener*-ov proces sa nezavisnim inkrementima, nulte srednje vrednosti i inkrementalne matrice kovarijanse $\boldsymbol{\Sigma}_W$. Funkcija F opisuje promene promenljivih stanja $\underline{X}$, dok funkcija G opisuje ulazne poremećaje sistema koje generiše *Wiener*-ov proces $\underline{W}$.

Uvođenjem stohastičkog člana $\underline{W}$ u (1), skup običnih diferencijalnih jednačina postaje skup stohastičkih diferencijalnih jednačina (2). Znači, promenljiva stanja $\underline{X}$ je uključena u stohastički proces.

Da bi se okarakterisao stohastički proces $\{\underline{X}(t)\}$, razmatraćemo prostor verovatnoće definisan sa $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, koji čine prostor uzoraka Ω (ili siguran događaj), koji se sastoji od elementarnih događaja (tj. ishoda eksperimenta) ω_i, polje događaja $\mathcal{F}$, i P je verovatnoća događaja [3]. Mera verovatnoće P označava verovatnoću $P(\mathcal{F}_j)$ za svaki događaj $\mathcal{F}_j$ u polju $\mathcal{F}$. Odavde, stohastički proces $\{\underline{X}(t)\}$ je skup:

$$\underline{X}(t,\omega), \qquad \omega \in \Omega, \qquad t \in J \tag{3}$$

slučajnih promenljivih, koje nazivamo stohastički proces sa vremenskim skupom J i prostorom stanja R^{nx}. Za konačno vreme, $\underline{X}(t,\cdot)$ odgovara slučajnoj promenljivoj, dok za konačno $\omega \in \Omega$, $\underline{X}(\cdot,\omega)$ odgovara realizaciji procesa. Takođe, $\underline{X}(\cdot,\omega)$ se naziva i deo putanje ili trajektorije.

Wiener-ov proces je jedan primer stohastičkog procesa. Matematička svojstva *nx*-dimenzionog *Wiener*-ovog procesa $\{\underline{W}(t), t \geq 0\}$ su:

$\underline{W} \equiv \underline{0}$

$\underline{W}(t) \in N(\underline{0}, t\,\Sigma_W)$ za neko $t \geq 0$, tj. inkrement $\underline{W}(t_2)$ - $\underline{W}(t_1)$ za neko $0 \leq t_1 \leq t_2$ ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću:

$$\mathrm{E}\big[\underline{W}(t_2) - \underline{W}(t_1)\big] = \underline{0} \tag{4}$$

i varijansom:

$$Var\big[\underline{W}(t_2) - \underline{W}(t_1)\big] = (t_2 - t_1)\Sigma_W \tag{5}$$

$\underline{W}_t$ ima nezavisne inkremente, tj. za neko $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$:

$$Cov\big[\underline{W}(t_3) - \underline{W}(t_2), \underline{W}(t_2) - \underline{W}(t_1)\big] = 0 \tag{6}$$

Razlozi za uvođenje šuma procesa su sledeći:

- zbog modeliranja aproksimacija – kao na primer zbog pojednostavljenja, linearizacije ili nemodeliranih osobina sistema
- neprepoznati ili nemodelirani ulazi
- šum merenja ulaza. Mereni ulazi se posmatraju kao stvarni ulazi u sistem, dok odstupanja od "pravih" ulaza se opisuju pomoću $\underline{W}$.

Cena koju je potrebno platiti za dobro modeliranje metodom modeliranja "sive kutije" je poprilično kompleksna statistička i matematička obrada modela i podataka. Jedan od složenijih problema je kako izvesti stohastičko integraljenje.

Delovi putanja *Wiener*-ovog procesa su kontinualni, ali nisu diferencijabilni po t za $t \geq 0$ sa verovatnoćom 1. Otuda, da bi rešili stohastičku diferencijalnu jednačinu, neophodno je koristiti drugačije načine rešavanja integrala, od onih koji su definisani standardnim *Riemann*-ovim integralima [4]. Odgovarajući stohastički račun je definisan *Itô*-ovim stohastičkim integralom [5].

Radi lakšeg razumevanja problema, razmatra se prvo jednodimenziona stohastička diferencijalna jednačina:

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + b\big(t, X(t)\big)dW(t) \tag{7}$$

gde je a koeficijent otklona a b je koeficijent rasipanja. Stohastička diferencijalna jednačina (7), takođe može biti napisana i kao integralna: (8)

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a\big(s, X(s,\omega)\big)ds + \int_0^t b\big(s, X(s,\omega)\big)dW(s,\omega)$$

gde je prvi integral standardan *Riemann*-ov integral za svako $\omega \in \Omega$, a drugi integral je *Itô*-ov stohastički integral koji je definisan kao srednje-kvadratno ograničenje leve strane pravougaone aproksimacije, tj.:

$$\sum_{j=0}^{N-1} b\big(t_j, W(t_j,\omega)\big)\big(W(t_{j+1},\omega) - W(t_j,\omega)\big) \tag{9}$$

za sve delove $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N = t$ ako maksimalna veličina koraka $\max\limits_j \big(t_{j+1} - t_j\big) \to 0$.

Više detalja vezanih za numeričke metode rešavanja stohastičkih diferencijalnih jednačina može se naći u [4,5,6].

4. ESTIMACIJA PARAMETARA MODELA

Za razmatranu strukturu nelinearnog modela (2), opservacije (tj. estimirana stanja) ovog modela su opisane sa:

$$\underline{Y}(k) = H\big(\underline{X}(k), \underline{U}(k), \underline{\theta}, k\big) + \underline{e}(k) \tag{10}$$

gde funkcija H predstavlja odnos između vektora izlaza i vektora stanja modela, k označava broj uzorka a $\underline{e}$ je šum merenja, za koji pretpostavljamo da je beli šum, tj. da ima normalnu funkciju raspodele, sa srednjom vrednošću $\underline{0}$ i kovarijansom $\Sigma_e(k)$. U slučaju ekvidistantnog uzorkovanja, sa vremenom uzorkovanja T_S, vreme t i broj uzorka k su u međusobnoj relaciji:

$$t = kT_S \tag{11}$$

Neka je struktura modela označena sa $\mathcal{M}$, a posebno model označen sa $\mathcal{M}(\underline{\theta})$, koji je parametrisan sa vektorom parametara $\underline{\theta} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \subset R^{np}$. Zadatak metode estimacije jeste da nađe optimalnu procenu parametara, označenu sa $\hat{\underline{\theta}}$ među skupom modela:

$$\mathcal{M}^* = \{\mathcal{M}(\underline{\theta}) |\ \theta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}\} \tag{12}$$

gde $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ označava zatvoreni podskup vrednosti preko kojih vektor parametara $\underline{\theta}$ dolazi do strukture modela $\mathcal{M}$, [3]. Suština postojanja modela je njegova mogućnost predikcije.

Otuda, dobar model je dobar prediktor kada pravi male greške predikcije:

$$\underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta}) = \underline{Y}(k) - \hat{\underline{Y}}(k \mid \underline{\theta}) \tag{13}$$

gde $\underline{Y}$ označava observaciju (tj. mereni izlaz sistema), $\hat{\underline{Y}}$ je procena iz modela $\mathcal{M}(\underline{\theta})$ a k je redni broj uzorka.

Definisaćemo $\boldsymbol{U}^N$ i $\boldsymbol{Y}^N$ (matrice dostupnih ulaza i izlaza, respektivno) kao:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}^N &= [\underline{U}(0), \underline{U}(1), \cdots, \underline{U}(N-1), \underline{U}(N)] \\ \boldsymbol{Y}^N &= [\underline{Y}(0), \underline{Y}(1), \cdots, \underline{Y}(N-1), \underline{Y}(N)] \end{aligned} \tag{14}$$

gde N označava broj uzoraka.

Jedan od načina za kvalifikovanje, (ocenjivanje), termina "mala" greška procene, jeste da se koristi sledeći izraz:

$$\nu_N(\underline{\theta}, \boldsymbol{Y}^N, \boldsymbol{U}^N) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \ell(\underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta})) \tag{15}$$

gde $\ell(\cdot)$ označava neki oblik skalarne vrednosti kriterijumske funkcije. Čest oblik korišćenja kriterijumske funkcije je kvadratna norma:

$$\ell(\underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta})) = \underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta})^T \underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta}) \tag{16}$$

Da bi se stavila dodatna ograničenja na grešku predikcije, greške predikcije $\underline{\varepsilon}$ se mogu propustiti kroz stabilan linearan filter $\Lambda(B)$:

$$\underline{\varepsilon}_\Lambda(k,\underline{\theta}) = \Lambda(B)\underline{\varepsilon}(k,\underline{\theta}), \quad 0 \le k \le N \tag{17}$$

gde B označava operator pomeranja unazad. Razlog filtriranja, tj. korišćenja Λ, je u tome da se uklone poremećaji na višim učestanostima (oni nisu toliko bitni za fizički model), a pojavljuju se u podacima. Dalja diskusija oko korišćenja filtara i uticaja filtriranja može se naći u [7].

Kao metod za estimaciju, koristićemo metod, tj. algoritam maksimalne verodostojnosti, "maximum likelihood". Ovaj algoritam ima veliku brzinu konvergencije ako su dobro odabrane početne procene nepoznatih parametara, i daje nepomerene i efikasne procene parametara [1,3]. Takođe, on se primenjuje u slučaju kada mereni podaci pripadaju unapred definisanoj funkciji raspodele. Na taj način, za dati skup opservacija $\boldsymbol{Y}^N$, kao što je definisano u (14), osnovna ideja je da se maksimizira verovatnoća opserviranih događaja, tj. vektor parametara $\underline{\theta}$ je izabran tako da opservirana merenja postanu što je moguće verovatnija. Opservacije su, zapravo, realizacije stohastičke promenljive.

Funkcija verodostojnosti $\mathcal{L}$ je bazirana na združenoj f-ji gustine verovatnoće opservacija:

$$p(\underline{\theta}; \underline{Y}(0), \underline{Y}(1), \cdots, \underline{Y}(N-1), \underline{Y}(N)) = p(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N) \tag{18}$$

Pretpostavljajući da su sve opservacije $\boldsymbol{Y}^N$ poznate, funkcija verodostojnosti $\mathcal{L}$ združene gustine verovatnoće je:

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N) = p(\boldsymbol{Y}^N \mid \underline{\theta}) \tag{19}$$

$$= p(Y(N) \mid \boldsymbol{Y}^{N-1}, \underline{\theta})\, p(\boldsymbol{Y}^{N-1}, \underline{\theta}) \tag{20}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{N} p(\underline{Y}(k) \mid \boldsymbol{Y}^{k-1}, \underline{\theta})\right) p(\underline{Y}(0), \underline{\theta}) \tag{21}$$

gde je $p(A \cap B) = p(A \mid B)p(B)$ *Bayes*-ovo pravilo. Skalar $\underline{Y}(0)$ označava početnu opservaciju. Ako se logaritmuje f-ja verodostojnosti (21), dobija se:

$$ln(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N)) = \sum_{k=1}^{N} ln\left(p(\underline{Y}(k) \mid \boldsymbol{Y}^{k-1}, \underline{\theta})\right) + ln(p(\underline{Y}(0), \underline{\theta})) \tag{22}$$

a iz ove jednačine uslovna funkcija verodostojnosti je:

$$ln(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N \mid \underline{Y}(0))) = \sum_{k=1}^{N} ln\left(p(\underline{Y}(k) \mid \boldsymbol{Y}^{k-1}, \underline{\theta})\right) \tag{23}$$

Sada treba da se nađe vektor parametara $\underline{\theta}$ koji maksimizuje funkciju verodostojnosti (21) za datu početnu opservaciju $\underline{Y}(0)$. Maksimizacija (23) je ekvivalentna minimizaciji - $ln(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N))$, pa se odavde nalazi uslovni estimator maksimalne verodostojnosti kao:

$$\hat{\underline{\theta}}_{ml} = \arg\min_{\underline{\theta} \in D_M} - \sum_{k=0}^{N} ln\,(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N \mid \underline{Y}(0))) \tag{24}$$

gde je poznata početna opservacija $\underline{Y}(0)$.

Pošto $\underline{e}$ kao i inkrement od $\underline{W}$ imaju normalnu raspodelu, onda i uslovna gustina izlaza ima normalnu raspodelu. Normalna raspodela je potpuno opisana pomoću srednje vrednosti i varijanse. Uslovna srednja vrednost i varijansa su (jednokoračna predikcija), [1]:

$$\hat{\underline{Y}}(k \mid k-1) = \mathrm{E}[\underline{Y}(k) \mid \underline{Y}(k-1), \underline{\theta}] \tag{25}$$

$$\boldsymbol{R}(k \mid k-1) = \mathrm{Var}[\underline{Y}(k) \mid \underline{Y}(k-1), \underline{\theta}] \tag{26}$$

respektivno, iz čega proizilazi da se uslovna funkcija verodostojnosti može napisati kao:

$$\begin{aligned} ln(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N \mid \underline{Y}(0))) &= -\frac{1}{2} ny\, ln(2\pi) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} ln(\det \boldsymbol{R}(k \mid k-1))\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\underline{\varepsilon}(k \mid k-1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}(k \mid k-1)\, \underline{\varepsilon}(k \mid k-1)\right) \end{aligned} \tag{27}$$

gde ny označava dimenziju vektora $\underline{Y}$ a greška predikcije (13) je sada greška jednokoračne predikcije:

$$\underline{\varepsilon}(k \mid k-1) = \underline{Y}(k) - \hat{\underline{Y}}(k \mid k-1) \tag{28}$$

nulte srednje vrednosti i kovarijanse $\boldsymbol{R}(k \mid k-1)$.

Pošto je estimator maksimalne verodostojnosti (24) asimptotski normalno raspodeljen sa srednjom vrednošću $\underline{\theta}$ i kovarijansom, [1]:

$$\mathrm{Cov}[\hat{\underline{\theta}}] \approx \boldsymbol{H}^{-1} \tag{29}$$

gde je $\boldsymbol{H}$ srednja vrednost Hesijan matrice (27), varijansa estimacija parametara može biti procenjena. Elementi matrice $\boldsymbol{H}$ su estimirani kao:

$$H_{ij} \approx -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} ln(\mathcal{L}(\underline{\theta}; \boldsymbol{Y}^N \mid \underline{Y}(0)))\right)\Bigg|_{\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}} \tag{30}$$

Uslovna srednja vrednost i varijansa se računaju rekurzivno pomoću tehnike *Kalman*-ovog filtra [1]. Uopšteno, nemoguće je naći analitičko rešenje jednačine (27), pa se zbog toga primenjuju numeričke metode [6].

Ako ne stoji pretpostavka da su merenja sa normalnom raspodelom, onda se metoda maksimalne verodostojnosti "redukuje" na *metod greške predikcije*. Za datu funkciju kriterijuma ℓ, filter $\boldsymbol{\Lambda}$ i strukturu modela $\mathcal{M}$, zadatak nalaženja optimalne estimacije parametara je ekvivalentan minimiziranju:

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \arg\min_{\underline{\theta} \in D_M} \nu_N(\underline{\theta}, \boldsymbol{Y}^N, \boldsymbol{U}^N) \tag{31}$$

gde optimalna estimacija parametara $\hat{\underline{\theta}}_N$ je argument funkcije kriterijuma ν, za koju je izraz (31) minimiziran [7].

5. KALMANOV FILTAR I METODE VALIDACIJE

Kalmanov filtar je tehnika filtriranja stanja, a njegova svrha je da se rekonstruišu promenljive stanja koje su bazirane na merenjima i datom modelu, kao što je na primer (2) i (10). Promenljive stanja, koje su po pretpostavci značajne za dinamiku sistema, su grupisane u $\underline{X}$. Međutim, samo delimično znanje o $\underline{X}$ je predstavljeno u merenjima $\underline{Y}$. Ovaj problem je rešen korišćenjem tehnike filtriranja stanja. Tačno rešenje problema filtriranja stanja za linearne dinamičke modele je dato Kalmanovim filtrom [3]. Slobodno govoreći, Kalmanov filtar rekonstruiše promenljive stanja u $\underline{X}$ iz podataka, tj. obavlja optimalno (metoda minimalne varijanse) linearno korigovanje i predikciju od $\underline{X}$. Osim toga, Kalmanov filtar daje račun za uslovnu srednju vrednost i varijansu, (25) i (26) respektivno, koji se koriste kod metode maksimalne verodostojnosti.

Razmatramo lineran model:

$$\begin{aligned} d\underline{X}(t) &= \boldsymbol{A}\underline{X}(t)dt + \boldsymbol{B}\underline{U}(t)dt + \boldsymbol{G}dW(t) \\ \underline{Y}(k) &= \boldsymbol{C}\underline{X}(k) + \boldsymbol{D}\underline{U}(k) + \underline{e}(k) \end{aligned} \tag{32}$$

gde $\boldsymbol{A}$ označava matricu sistema, $\boldsymbol{B}$ matricu ulaza, $\boldsymbol{G}$ matricu ulaza šuma sistema, $\boldsymbol{C}$ matricu izlaza i $\boldsymbol{D}$ matricu direktnih izlaza. $\underline{W}$ je *Wiener*-ov proces sa nultom srednjom vrednošću i inkrementalnom matricom kovarijanse $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{W}}$, dok je $\underline{e}$ *Gauss*-ovski beli šum sa nultom srednjom vrednošću i kovarijansom $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{e}}$. Takođe, $\underline{W}$ i $\underline{e}$ su međusobno nekorelisani.

Prediktujući deo kontinualno-diskretnog Kalmanovog filtra je dat kao:

$$\frac{d\hat{\underline{X}}(t|k)}{dt} = \boldsymbol{A}\,\hat{\underline{X}}(t|k) + \boldsymbol{B}\,\underline{U}(t) \tag{33}$$

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t|k)}{dt} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}(t|k) + \boldsymbol{P}(t|k)\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{W}}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

$$\hat{\underline{Y}}(k+1|k) = \boldsymbol{C}\,\hat{\underline{X}}(k+1|k) + \boldsymbol{D}\,\underline{U}(k+1) \tag{35}$$

$$\boldsymbol{R}(k+1|k) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{P}(k+1|k)\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{e}} \tag{36}$$

gde je $t \in [kT_s, (k+1)T_s]$ a $\boldsymbol{P}$ je varijansa jednog koraka ispred predikcije, dok je "korektivni" deo:

$$\hat{\underline{X}}(k|k) = \hat{\underline{X}}(k|k-1) + \boldsymbol{K}(k)\left(\underline{Y}(k) - \hat{\underline{Y}}(k|k-1)\right) \tag{37}$$

$$\boldsymbol{P}(k|k) = \boldsymbol{P}(k|k-1) - \boldsymbol{K}(k)\,\boldsymbol{R}(k|k-1)\,\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(k) \tag{38}$$

$$\boldsymbol{K}(k) = \boldsymbol{P}(k|k-1)\;\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\;\boldsymbol{R}(k|k-1)^{-1} \tag{39}$$

Početni uslovi su: $\hat{\underline{X}}(1|0) = \underline{X}_0$ i $\boldsymbol{P}(1|0) = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{0}}$. Predikcije za uslovnu srednju vrednost i varijansu, jednačine (35) i (36) respektivno, se izračunavaju kada je $t = (k+1)T_s$.

Za nelinearan model opisan sa (2) i (10), da bi mogli da koristimo Kalmanov filtar, model treba linearizovati u svakom odbirku k. Prema tome, matrice sistema $\boldsymbol{A}$ i izlaza $\boldsymbol{C}$ se računaju kao:

$$\boldsymbol{A}(k) = \left.\frac{\partial F\left(\underline{X}(t), \underline{U}(t), \underline{\theta}, t\right)}{\partial \underline{X}(t)}\right|_{\substack{\underline{X}(t)=\hat{\underline{X}}(t|k-1) \\ \underline{U}(t)=\underline{U}(kT_s)}}, \quad t = kT_s \tag{40}$$

$$\boldsymbol{C}(k) = \left.\frac{\partial H\left(\underline{X}(t), \underline{U}(t), \underline{\theta}, t\right)}{\partial \underline{X}(t)}\right|_{\substack{\underline{X}(t)=\hat{\underline{X}}(t|k-1) \\ \underline{U}(t)=\underline{U}(kT_s)}}, \quad t = kT_s \tag{41}$$

Ideja je da se koriste (40) i (41) umesto $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C}$, respektivno, u j-nama za linearan model, dok su (33) i (35) zamenjeni determinističkim delom od (2) i (10), respektivno.

Validacija modela je važan deo procesa modeliranja, slika 2. Njena svrha je da se ocene performanse predloženog modela i estimacije parametara, tj. da se prosudi da li estimirani model zadovoljava postavljene kriterijume. Postoji nekoliko metoda za upoređivanje skupa modela. Jedan kriterijum je proceniti da li različiti modeli ispunjavaju kriterijum na analizi reziduala, stepenu fizičke interpretacije, kros validacije i mogućnosti ekstrapolacije. Druge metode se zasnivaju na selekciji kriterijuma modela ili testovima indeksa verodostojnosti [7].

6. ZAKLJUČAK

Predstavljen je opšti koncept modeliranja "sive kutije". Takođe, data su i neka razmatranja o identifikaciji sistema. Klasa modela je bazirana na stohastičkim diferencijalnim jednačinama, a model je nelinearan.

Kao metod estimacije opisan je metod maksimalne verodostojnosti. Pošto je samo podskup promenljivih stanja meren, uopšteno, neophodno je da se primeni tehnika filtriranja stanja, tj. Kalmanov filtar, da bi se rekonstruisale promenljive stanja. Jedna od dobrih karakteristika ovog pristupa estimacije je da su vremenski kontinualni parametri estimirani direktno. Na kraju, pomenute su i neke metode validacije modela, kao što su testovi bazirani na verodostojnosti, analizi reziduala i kros validaciji.

LITERATURA

[1] M. Mataušek, *Beleške sa predavanja iz predmeta "Optimalno upravljanje procesima"*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990.

[2] S.Jovanović, M.Matijević, S.Đorđević, "Uvod u teoriju i metodologiju modeliranja sistema centralnog grejanja", predato za štampanje u časopisu *Tehnika, 2009.*

[3] B. Kovačević, *Beleške sa predavanja iz predmeta "Stohastički sistemi i estimacija"*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990.

[4] P.E.Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd Edition, Springer-Werlag, 2004.

[5] H.Allouba, "A Differentiation Theory for Itô's Calculus", *Stochastic Analysis & Applications 24*, p.367–380, 2006.

[6] T.Petrović, S.Milošević, *SAU – Programska rešenja*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1987.

[7] L.Ljung, *System Identification – Theory for the User*, Prentice-Hall, 1987.

[8] J.Holst,U.Holst, H.Madsen, and H.Melgaard, "Validation of grey box models", *In IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp.53–60, France, 1992.

Abstract – In this paper, a survey of the Grey Box modelling technique based on stochastic differential equations is given. A maximum likelihood method, as estimation method, is described. Finally, some validation methods for parameter estimates are noted.

GREY BOX MODELLING OF CENTRAL HEATING SYSTEMS

Saša Jovanović, Milan Matijević, Slobodan Đorđević